Глава 1 Векторные пространства

§1 Абстрактные векторные пр-ва

↗ считаем представит. длина вектора.
внимание к св-м.

Опр. Непустое мн-во V над векторным (линейным) пространством, если

(I) ~~Знт~~ ∀ двух эл-ов $x, y \in V$ однозн. опр-н эл-т $z = x + y$, причем

V явл абелевой группой по сложению
1) коммутативность $x + y = y + x$
2) ассоциативность $(x+y)+z = x+(y+z)$
3) в V ∃ выделенный элт, над нулевым вектором $\forall x \in V$ $x + 0 = x$
4) $\forall x \in V$ ∃ обратный элт $(-x)$ (противоположный) $x + (-x) = 0$

(II) ∀ числа α и ∀ эл-та $x \in V$ определен элт αx - произв. числа α на вектор x, причем

5) $1 \cdot x = x$
6) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

Сложение и умн. связаны двумя законами дистрибутивности.

7) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
8) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

$\alpha \in R \rightarrow V$ - вещ. вект. пр-во
$\alpha \in C \rightarrow V$ - компл вект пр-во

Примеры векторных пр-в

1) геометрич пр-ва векторов V_1, V_2, V_3 на прямой, пл-ти, пр-ве
2) пр-во вещ. матриц $R^{m \times n}$
3) арифметич. пр-во $R^n = \{a = (a_1 \dots a_n), a_i \in R, i = 1..n\}$ сложение и умн. на число покомпонентно.
4) пр-во многочленов
5) совокупность непрерыв. фй на $[a, b]$ (бесконечномерное)

§2 Линейная зависимость. Размерность и базис.

Линейная комбинация: $V_1 \dots V_n \in V$ $\quad \alpha_1 \dots \alpha_n \in R$ (или C) - скаляры

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$

Опр Векторы $V_1 \dots V_k$ пр-ва V над линейно зависимыми, если некоторая их нетрив. лин. комб. $= 0$ (нул. вектор)

т.е. $\exists \alpha_1 \dots \alpha_k$ не все равные 0, такие что $\alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k = 0$.

В противном случае - лин. независимы, то есть все $\alpha_i = 0$

Теорема 1

Векторы $V_1 \dots V_n$, $n \geq 2$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$ хотя бы один из них явл лин. комб остальных.
Если система векторов лин нез, то и всякая ее подсистема также лин нез.

Док-во упр (см 1 семестр)

Теорема 2

Если в пр-ве V каждый из векторов лин нез систем $e_1 \dots e_s$ явл лин комб векторов системы $f_1 \dots f_t$, то $s \le t$.

Док-во: По усл $e_1 = \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + \dots + \alpha_{t1} f_t$ (нум. по столбцам)

$\vdots$

$e_s = \alpha_{1s} f_1 + \alpha_{2s} f_2 + \dots + \alpha_{ts} f_t$

Предположим $s > t$.
Составим из векторов $e_1 \dots e_s$ лин. комб. с коэф. x_j:

$x_1 e_1 + \dots + x_s e_s$

Каждый вектор $e_1 \dots e_s$ выражается ч/з $f_1 \dots f_t$. Подставим.

$x_1 (\alpha_{11} f_1 + \dots + \alpha_{t1} f_t) + \dots = (\alpha_{11} x_1 + \dots_s) f_1 + \dots + (\alpha_{t1} x_1 + \dots_s) f_t$

Рассм систему из t лин ур-й с s неизв-ми.

$\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1s} x_s = 0$

$\vdots$

$\alpha_{t1} x_1 + \dots + \alpha_{ts} x_s = 0$

t ур-й s неизв, по предп. $t < s \Rightarrow$ это одн. сис имеет ненулевые решение $(\beta_1 \dots \beta_s)$

$\beta_1 e_1 + \dots + \beta_s e_s = 0$ нетрив. лин зависим.

Противоречие.

Значит, $s \le t$.

Следствие

Любые две эквивалентные лин нез системы векторов в V содержат одинаковое кол-во векторов.

Две системы наз эквивалентными, когда каждый вектор одной системы явл лин комб векторов другой системы.

Опр Число векторов содержащихся в любой максимальной лин нез подсистеме данной системы векторов, наз рангом этой системы.

(Максимальная, т.е. нельзя расширить до лин нез подсистемы из большего кол-ва векторов)

Опр Линейное пр-во V, в котором сущ n лин нез векторов, но нет лин нез систем с большим числом векторов (большего ранга), ~~также~~ наз n-мерным

$\dim V = n$

Нулевое пр-во считается нульмерным.

Опр. Пусть V - n-мерное вект. пр-во
Любая система из n лин нез векторов $e_1 \dots e_n$ наз базисом пр-ва V.

Базис - максимально лин нез подсистема.

Примеры 1) $\mathbb{R}^n$ $e_1 = (1, 0, 0 \dots 0)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0 \dots 0, 1)$

2) многочлен, степень $\le n$ $1, t, t^2 \dots t^n$

Утверждение 1

Пусть V - вект. пр-во над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) с базисом $e_1 \dots e_n$.
Тогда каждый вектор $v \in V$ можно представить, и притом единств. образом, в виде лин. комб. базисных.

Док-во

1) К системе $e_1 \dots e_n$ присоединим v $\Rightarrow$ получим лин. зав. систему, т.е. $\alpha v + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$, $\alpha \neq 0$

$\Rightarrow v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} e_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} e_n$.

2) Если бы $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$

$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0$

но $e_1 \dots e_n$ лин. нез.

$\Rightarrow$ рав-во вып, когда $\alpha_i = \beta_i$.

Теорема (о дополнении до базиса)

Всякую систему из $s < n$ лин. нез. векторов $f_1 \dots f_s$ можно дополнить до базиса.

Док-во ($e_1 \dots e_n$ - базис V)

Расм. систему векторов $f_1 \dots f_s, e_1 \dots e_n$
Выбросим из этой системы все векторы, которые лин. выражаются из предыдущих.

$f_1 \dots f_s$ лин. нез. $\Rightarrow$ ни один из них не будет выброшен.

Останется система $f_1 \dots f_s, e_{i_1} \dots e_{i_k}$

Если $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_k e_{i_k} = 0$
то $\beta_k = 0$.
Иначе e_{i_k} выражается из предыдущих
и так далее. $\Rightarrow \beta_i = 0$

А т.к. $f_1 \dots f_s$ ~~лин~~ лин. нез. $\Rightarrow \alpha_i = 0$.

т.е. система $f_1 \dots f_s, e_{i_1} \dots e_{i_k}$ лин. нез., кроме того максимальна
Т.к. все векторы выраж. из $e_1 \dots e_n$
$\Rightarrow$ из $f_1 \dots f_s, e_{i_1} \dots e_{i_k}$,

Т.е. эта система - базис V, а $e_{i_1} \dots e_{i_k}$ - дополнение до базиса

§3 Координаты вектора. Переход к другому базису.

С помощью базиса абстрактные векторы можно задавать в виде совокупности чисел, а операции над векторами сводить к операциям над числами.

Опр. Пусть $e_1 \dots e_n$ - базис V, $v \in V$, то v однозначно раскладывается по базису $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$.
Скаляры $v_1 \dots v_n \in P$ ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) наз. координатами вектора v в базисе $e_1 \dots e_n$.

Обозн. $v_e = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Если $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, то $x + y = (x_1 + y_1) e_1 + \dots + (x_n + y_n) e_n$
$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$
$\alpha x = (\alpha x_1 \dots \alpha x_n)$

Примеры

1) P_n - многочлены степени $\le n-1$. Один из базисов
$e_0 = 1$, $e_1 = t$ ... $e_{n-1} = t^{n-1}$

$f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ координаты мн-на в этом базисе

3) $\mathbb{R}^n$. $e_1=(1,0..0)$ $e_2=(0,1,0..0)$ .. $e_n=(0..0,1)$

В имеется бесконечно много других базисов, в которых координатами того же вектора будут другие числа.

Пусть V - n-мерное векторное пр-во и его базисы $(e_1 .. e_n)$ и $(e_1' .. e_n')$.
Векторы одного базиса выражаются ч/з векторы другого базиса.

$$e_1' = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n$$
$$\vdots$$
$$e_n' = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n$$

Коэф-ты этого разложения образуют матрицу перехода.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$$ наз матрицей перехода от e к e'

Выбранный способ построения матрицы по столбцам! В j-ом столбце стоят координаты вектора e_j' относит базиса $(e_1 .. e_n)$

$[e_1', .. e_n'] = [e_1 .. e_n]\,T$ или $e' = eT$

Утверждение 1

Матрица перехода невырождена.

Док-во: Пусть вырождена $\Rightarrow$ $\det T = 0$. Тогда один из столбцов явл лин. комб всех остальных $\Rightarrow$ один из векторов $(e_1' .. e_n')$, напр e_j', линейно выражается ч/з другие векторы, что противоречит лин нез-ти e'.

Утверждение 2

Если T - матрица перехода от e к e', то обратная матрица T^{-1} - матрица перехода от e' к e.

Док-во: $e' = eT \quad | \cdot T^{-1} \Rightarrow e'T^{-1} = e$.

Теорема

Координаты вектора x в базисах e и e' связаны м/у собой соотношением $x_e = T x_{e'}$, где T - матрица перехода от e к e'.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Док-во:

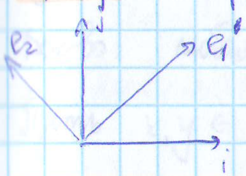
$x = e x_e \iff \vec{x} = (e_1 .. e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

и

$x = e' x_{e'} = (eT)x_{e'} = e(Tx_{e'})$

В силу единственности разложения по базису получаем $x_e = Tx_{e'}$.

Пример (поворот на угол φ)



$e_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$x_e = Tx_{e'}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ $\quad \begin{aligned} x_1 &= \cos\varphi \cdot x_1' - \sin\varphi\, x_2' \\ x_2 &= \sin\varphi\, x_1' + \cos\varphi\, x_2' \end{aligned}$

§4. Изоморфизм векторных пр-в.

Опр. Векторные пр-ва V и W наз изоморфными над полем P, если сущ. биективное отображение
$f: V \to W \mid f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

Размерность явл инвариантом изоморфизма.

Если $(e_1 .. e_n)$ - базис V, то $(f(e_1) .. f(e_n))$ - базис W

Теорема

Все векторные пр-ва одинаковой размерности n изоморфны

Док-во: Пусть $e_1 .. e_n$ базис V.

Координаты $x_1 .. x_n$ произвольного вектора $x \in V$ однозначно определены.
$x = x_1 e_1 + .. + x_n e_n$.

$f: x \to (x_1 .. x_n)$

$f: V \to \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$

Если $y = y_1 e_1 + .. + y_n e_n$, то

$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) e_1 + .. + (\alpha x_n + \beta y_n) e_n$

$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1 \; ... \; \alpha x_n + \beta y_n) =$

$= \alpha (x_1 .. x_n) + \beta (y_1 .. y_n) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

§5. Пересечение и сумма подпространств.

Опр. Подмножество L линейного пространства V наз линейным подпространством V, если оно само явл. лин. пр-ом относительно сложения и умножения на скаляр.
(замкнуто относит этих операций)

Пример: отрезок в плоскости не явл. лин. пр-вом.

Пусть $L_1, L_2 .. L_k$ - линейные подпр-ва V.

Опр. Пересечением подпр-в $L_1 .. L_k$ наз мн-во
$L_1 \cap .. L_k = \{x \in V \mid x \in L_i \quad i = 1..k\}$.

Всегда не пусто, т.к. содержит $\vec{0}$.

Опр. Суммой подпр-в $L_1 .. L_k$ наз мн-во всевозможных векторов, представимых в виде $x = x_1 + .. + x_k$, $x_i \in L_i$

$L_1 + .. + L_k = \sum_{i=1}^{k} L_i = \{x = x_1 + .. + x_k \mid x_i \in L_i, \; i = 1..k\}$.

Теорема

Сумма и пересечение подпр-в V явл линейными подпр-ми.

Док-во: любая лин. комб. там лежит.

Упр

Пусть $x, y \in \bigcap_{i=1}^{n} L_i$ $\quad ? \alpha x + \beta y \in \bigcap_{i=1}^{n} L_i$?

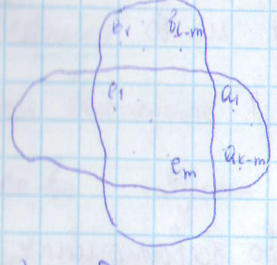
Теорема (формула размерностей Грассмана)

Для любых двух лин подпр-в L_1 и L_2

$$\boxed{\dim(L_1+L_2)=\dim L_1+\dim L_2-\dim(L_1\cap L_2)}$$

Пусть $\dim L_1 = k$, $\dim L_2 = l$, $\dim(L_1\cap L_2)=m$

Выберем в пересечении $L_1\cap L_2$ какой-нибудь базис $e_1 \dots e_m$ и дополним его до базиса $(e_1 \dots e_m, a_1 \dots a_{k-m})$ подпр-ва L_1 и до базиса $(e_1 \dots e_m, b_1 \dots b_{l-m})$ подпр-ва L_2.



Покажем, что система векторов $e_1 \dots e_m, a_1 \dots a_{k-m}, b_1 \dots b_{l-m}$ образуют базис L_1+L_2.

1) проверим лин нез-ть.

(*) Пусть $\gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_m e_m + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{k-m}a_{k-m} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{l-m} b_{l-m} = 0$

Тогда
$$\underbrace{-\sum_{i=1}^{l-m}\beta_i b_i}_{\text{вектора из } L_2} = \underbrace{\sum_{s=1}^{m}\gamma_s e_s + \sum_{j=1}^{k-m}\alpha_j a_j}_{\text{вектора из } L_1}$$

т.е. это вектора из $L_1\cap L_2$, т.е.

$-\sum \beta_i b_i = \sum \delta_s e_s$, т.е. $\delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \dots + \delta_m e_m + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{l-m} b_{l-m} = 0$

но

$e_1 \dots e_m, b_1 \dots b_{l-m}$ - базис L_2 => все коэф $=0$

в частности $\beta_1 = \beta_{l-m} = 0$

из (*) $\to \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_m e_m + \alpha_1 a_1 + \dots \alpha_{k-m} a_{k-m} = 0$ => все коэф $=0$.

2. $\langle e_1 \dots e_m, a_1 \dots a_{k-m}, b_1 \dots b_{l-m}\rangle = L_1+L_2$

система лин. нез и полна => базис.

$\dim(L_1+L_2) = m + (k-m) + (l-m) = k + l - m = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1\cap L_2)$.

Пусть L - подпр-во V. $\operatorname{codim} L_1 = \dim V - \dim L$ наз коразмерностью L.

Подпространство коразмерности 1 наз гиперплоскостью.

§6 Прямая сумма подпространств

$V = L_1 + L_2 + \dots + L_n$, $v \in V$, $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, где $v_i \in L_i$

Опр. Если каждый вектор $v\in V$ единственным образом раскладывается в сумму векторов $v = v_1 + \dots + v_n$, $v_i \in L_i$, то $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n$, где $v_1 \in L_1 \dots v_n \in L_n$.

Критерий прямой суммы: $V = L_1 \oplus L_2 \Leftrightarrow L_1 \cap L_2 = \{0\}$.

Док-во: ① необходимость

$\forall x \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow x \in L_1$ & $x \in L_2$ => $\begin{matrix} y = x + 0 \\ y = 0 + x \end{matrix}$ => $x = 0$

② достаточность

$L_1 \cap L_2 = \{0\}$: $V = L_1 \oplus L_2$: $x \in V = L_1 + L_2$ => $x = y_1 + y_2$, где $y_1 \in L_1$, $y_2 \in L_2$.

Пусть есть еще одно разложение $x = z_1 + z_2$, где $z_1 \in L_1$, $z_2 \in L_2$.

Тогда $y_1 - z_1 = -y_2 + z_2$ => $\begin{matrix} y_1 - z_1 \in L_1 \\ -y_2 + z_2 \in L_2 \end{matrix}$

Отсюда $y_1 - z_1 \in L_1 \cap L_2$ и $-y_2 + z_2 \in L_1 \cap L_2$

$\begin{cases} y_1 - z_1 = 0 \\ -y_2 + z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 \end{cases}$

Следовательно, разложение x единственно и $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.

Теорема

Подпространства $L_1 \dots L_n$ пр-ва V. След усл экв-ны:

1) $L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ прямая сумма
2) $L_i \cap (L_1 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_n) = \{0\}$, $\forall i = 1 \dots n$
3) $L_i \cap (L_{i+1} + \dots + L_n) = \{0\}$, $i = 1 \dots n-1$
4) если $0 = v_1 + \dots + v_n$, где $v_i \in L_i$, то $v_1 = \dots = v_n = 0$.
5) $\dim L_1 + \dots + \dim L_n = \dim (L_1 + \dots + L_n)$.

$n \geq 2$ $\quad L_i \cap L_j = \{0\}$ $\quad 1 \leq i < j \leq n$

$\mathbb{R}^2$: $L_1 = \{e_1\}$, $L_2 = \{e_2\}$, $L_3 = \{e_1 + e_2\}$, $L_i \cap L_j = \{0\}$, $i \neq j$

$L_1 + L_2 + L_3 \Rightarrow 0 + 0 + e_1 + e_2 = v = e_1 + e_2 + 0$.
непрямая сумма

Опр Пусть L_1 - лин подпр-во пр-ва V. Подпр-во L_2 наз дополнительным к подпр-ву ~~пр-ва~~ L_1, если $V = L_1 \oplus L_2$.

Лемма

Для любого подпр-ва L_1 сущ дополнительное подпр-во L_2.

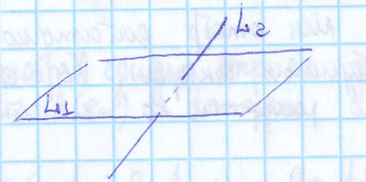
Док-во:

Возьмем базис подпр-ва L_1: $\{e_1 \dots e_k\}$
Дополним его до базиса ~~подпр-ва~~ V: $\{e_1 \dots e_k, e_{k+1} \dots e_n\}$
То найдется базис подпр-ва L_2: $\{e_{k+1} \dots e_n\}$

Замечание

Если $L_1 \neq \{0\}$, то L_2, доп. подпр-во, определено неоднозначно

$\mathbb{R}^3 = V$



$V = L_1 \oplus L_2$

Глава 2. Линейные операторы

§1 Линейные отображения

Опр. Пусть V и W - линейные пр-ва над полем K. Отображение $A: V \to W$ наз линейным, если для любых $u, v \in V$ и $\lambda \in K$ выполняется
$A(u + v) = A(u) + A(v)$
$A(\lambda u) = \lambda A(u)$

Опр Если пр-ва совпадают, т.е. $W = V$, $A: V \to V$, то A наз линейным оператором.

Примеры лин. операторов

1) $D: M_n \to M_n$. $D p(t) = p'(t)$, то D- оператор дифф-я.
2) $S: M_n \to M_n$. $S p(x) = \int_0^t p(x)\,dx$ оператор интегр-я
3) $O: V \to V$. $Ox = 0$ нулевой оператор
4) $I: V \to V$. $Ix = x$ тождественный оператор

Свойства линейного отображения

1) Всякое лин. отобр переводит „$\vec{0}$" в „$\vec{0}$". $A(\vec{0}) = A(0 \cdot \vec{x}) = 0$
2) Лин отобр сохр лин комб-ю. $A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 A(x_1) + \dots + \alpha_n A$
(по индукции)